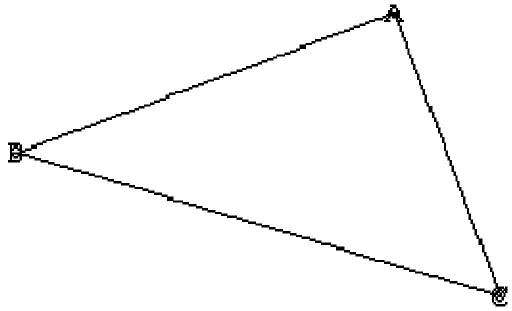
Manual de teoría: Trigonometría Matemática Bachillerato

Realizado por José Pablo Flores Zúñiga

Contenido:

Trigonometría

4.1 Trigonometría Básica

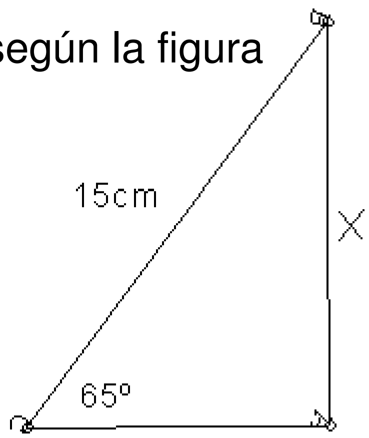


$\overline{CB}$ Es la hipotenusa

$\overline{CA}$ Y $\overline{AB}$ son catetos

Razones trigonométricas		Razones inversas	
Razón	**Fórmula**	**Inversa**	**Fórmula**
$sen\,\theta$	$\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$\csc\theta$	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
$\cos\theta$	$\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$\sec\theta$	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$\tan\theta$	$\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$\cot\theta$	$\dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Ejemplo: Calcular la medida de x según la figura



$$\csc 65^{o} = \frac{15}{x}$$

$$x = \frac{15}{\csc 65^{o}} = 13{,}59\,cm$$

4.2 Funciones trigonométricas

Los valores de los ángulos son en π radianes

Función Seno

$f(x) = senx$

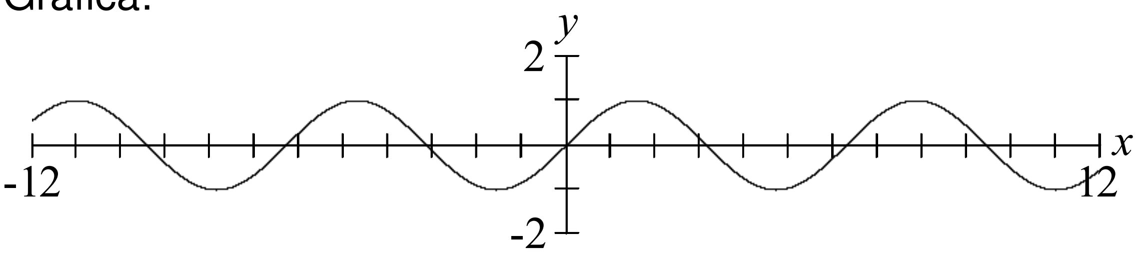
Dominio: IR

Rango: $[-1,1]$

Periodo 2π

Interseca al eje y en $(0,0)$

Gráfica:



Función Coseno

$f(x) = \cos x$

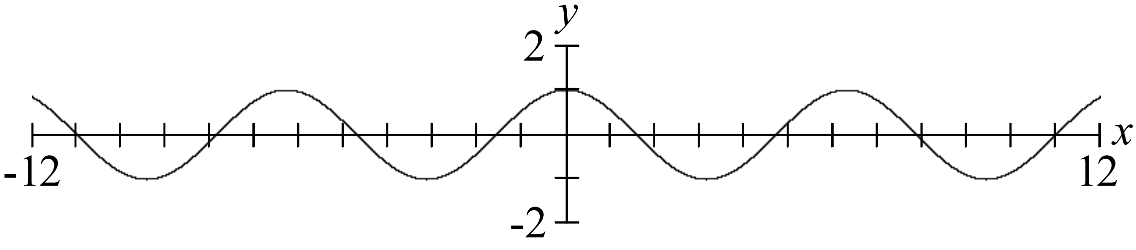
Dominio: IR

Rango: $[-1,1]$

Periodo 2π

Interseca al eje y en $(0,1)$

Gráfica:



Función Tangente

$f(x) = \tan x$

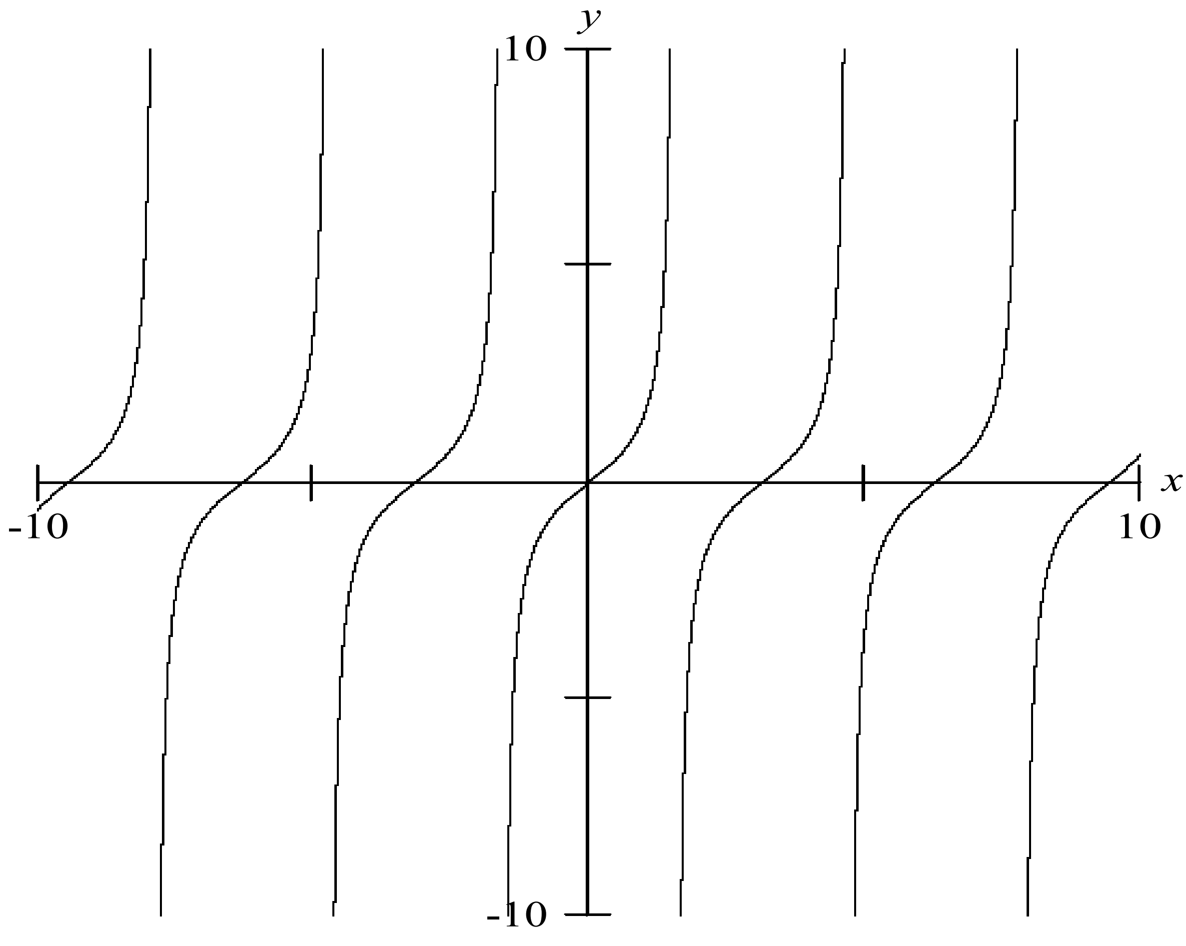
Dominio: $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \, tal \, que \quad k \in Z \right\}$

Codominio IR

Periodo π

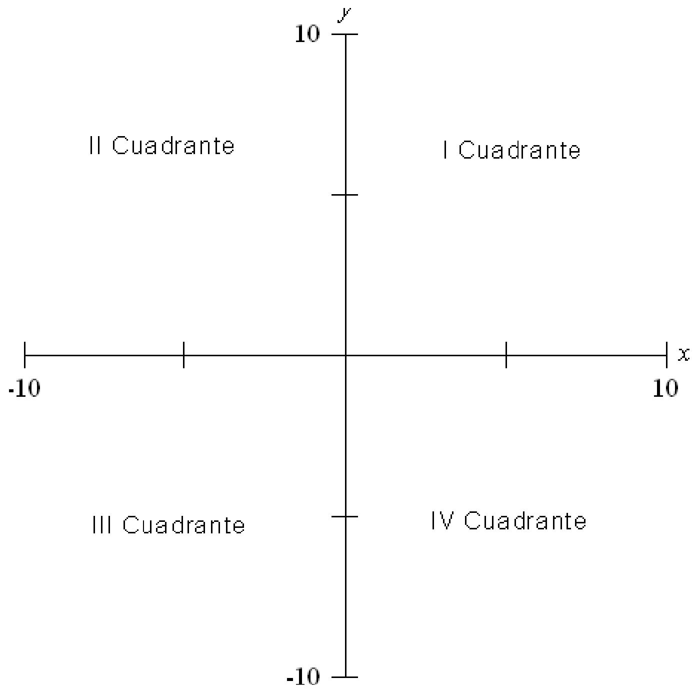
Interseca al eje x en $x = k\pi \quad con \, k \in Z$

Gráfica:



4.3 Trigonometría en el plano cartesiano

Plano cartesiano



Ángulos :

Ángulo positivo: si la rotación es sentido contrario a las manecillas del reloj.

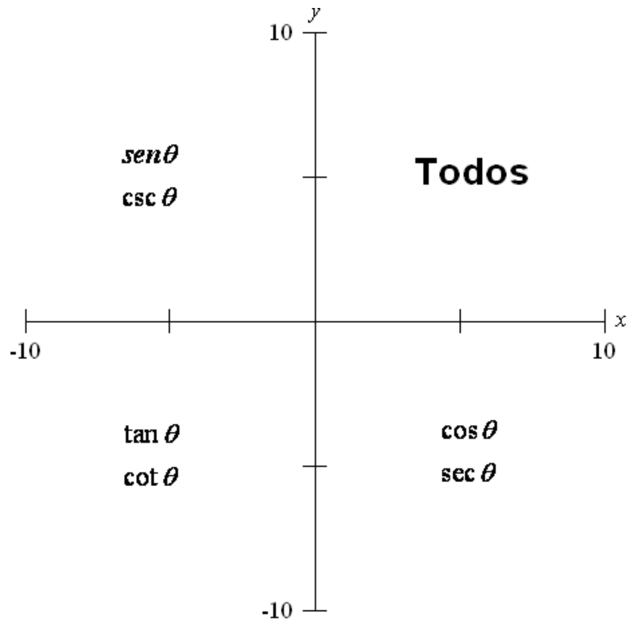
Ángulo negativo: si la rotación va en sentido de las manecillas del reloj.

Ángulo cuadrantal: si el lado final de un ángulo coincide con un semieje coordenado.

Ángulo de referencia: es el ángulo positivo que forma con el semieje x.

Ángulo Coterminal: es el ángulo que falta para completar una revolución

Valores positivos para las funciones trigonométricas:



Existe una frase para aprendérselas es: **todos sen**timos **tan**tas **cos**itas. Es una dirección positiva y recordar además las inversas.

Calculo de razones trigonométricas:

Para los valores de ángulos: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\, y\, \frac{\pi}{6}$ o sea 45º, 60º y 30º se trabajan con triángulos especiales:

Para ángulos superiores se trabaja con el ángulo de referencia y el valor va a dar positivo o negativo dependiendo la posición en el plano cartesiano.

También hay valores para ángulos cuadrantales según la siguiente tabla. También se pueden calcular con una calculadora científica moderna y si el valor le da error matemático es porque es un valor infinito:

θ	$sen\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0º	0	1	0	∞	1	∞
90º	1	0	∞	1	∞	0
180º	0	-1	0	∞	-1	∞
270º	-1	0	∞	-1	∞	0
360º	0	1	0	∞	1	∞

Ejemplos

Calcular el valor $sen150^{o} + \cos 315^{o}$

El ángulo de referencia para 150º es 30º y el ángulo de referencia para 315º es 45º además al estar en el IV cuadrante el coseno es positivo.

Es equivalente la expresión a: $sen30^{o} + \cos 45^{o}$

Utilizando los triángulos especiales:

$$sen30^{o} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 45^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen30^{o} + \cos 45^{o}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Calcular el ángulo coterminal para un ángulo de 210º

para completar la revolución falta 210º-360º = -150º

Cuanto es: $(sen330^{o})^{3}$

El ángulo de referencia de 330º es 30º como esta en el IV cuadrante el valor de seno es negativo:

Es equivalente a $(-sen30^{o})^{3}$, $sen30^{o} = \frac{1}{2}$

Entonces: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = -\frac{1}{8}$

En el círculo trigonométrico el radio tiene el valor de una unidad

Ejercicios Propuestos:

Determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ si (x, y) es un punto del lado final de dicho ángulo

1) $(2,2)$
2) $(-3,4)$
3) $(-5,-12)$
4) $(8,-6)$
5) $(-5,-6)$

Determinar el cuadrante en que termina el ángulo si:

1) $sen\theta \; y \cos\theta$ son ambos negativos
2) $sen\theta \; y \cot\theta$ son ambos positivos
3) $\tan\theta \;\; y \csc\theta$ son ambas negativas

Hallar la medida del ángulo de referencia para:

1) $\frac{5}{3}\pi$
2) $\frac{15}{4}\pi$

Encontrar el valor exacto para las funciones trigonométricas:

1) $sen 120^{o}$
2) $\tan 135^{o}$
3) $\cot\frac{7}{4}\pi$

Resuelva las operaciones dando una respuesta exacta:

1) $sen 45^{o} + \sec 0^{o} - \csc 60^{o} + \cot 45^{o}$
2) $\cot 270^{o} + \cos 90^{o} - \tan 180^{o} - \cos 180^{o} + sen 60^{o} + \sec 30^{o}$
3) $2\cos 360^{o}\left(sen 45^{o} + \cot 30^{o}\right) + \sec 60^{o}$

4.4 Identidades trigonométricas:

Por cociente
$\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$
$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$

Cofunciones
$sen(90º-\theta) = \cos\theta$
$\cos(90º-\theta) = sen\theta$
$\tan(90º-\theta) = \cot\theta$
$\cot(90º-\theta) = \tan\theta$
$\csc(90º-\theta) = \sec\theta$
$\sec(90º-\theta) = \csc\theta$

Pitagóricas
$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

recíprocas
$\csc\theta = \dfrac{1}{sen\theta}$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Ángulos negativos
$sen(-\theta) = -sen\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Para realizar este tipo de ejercicios no existe ningún método que permita llegar a la respuesta buscada, solamente se pueden hacer transformaciones mediante las identidades y sólo se logra satisfactoriamente con abundante práctica de esta.

Ejemplos:

comprobar que $\sec^2 x \bullet \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

Entonces resolvamos $\sec^2 x + \csc^2 x$

$$\sec^2 x + \csc^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{sen^2 x}$$

$$= \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \bullet sen^2 x}$$ Recuerde que heterogéneas

$$= \frac{1}{\cos^2 x \bullet sen^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \bullet \frac{1}{sen^2 x}$$

$$= \sec^2 x \bullet \csc^2 x$$

Comprobar que $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

$$\frac{1}{\cot\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos\theta}{sen\theta}}$$

$$= \frac{sen\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Demostrar que $\cos\beta(\tan\beta+\cot\beta)=\csc\beta$

$$\cos\beta(\tan\beta+\cot\beta)$$
$$=\cos\beta\tan\beta+\cos\beta\cot\beta$$
$$=\cos\beta\frac{sen\beta}{\cos\beta}+\cos\beta\frac{\cos\beta}{sen\beta}$$
$$=sen\beta+\frac{\cos^2\beta}{sen\beta}$$
$$=\frac{sen^2\beta+\cos^2\beta}{sen\beta}$$
$$=\frac{1}{sen\beta}=\csc\beta$$

Demostrar que: $(1+sen\alpha)(1-sen\alpha)=\cos^2\alpha$

$$(1+sen\alpha)(1-sen\alpha)$$
$$Por\ fórmula\ notable: 1^2-sen^2\alpha$$
$$=1-sen^2\alpha$$
$$=\cos^2\alpha$$

Demostrar que $\dfrac{\csc\vartheta}{\sec\vartheta}=\cot\vartheta$

$$\frac{\csc\vartheta}{\sec\vartheta}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{sen\vartheta}}{\dfrac{1}{\cos\vartheta}}$$
$$=\frac{\cos\vartheta}{sen\vartheta}=\cot\vartheta$$

Demostrar que $\tan z+\frac{\cos z}{1+sen\,z}=\sec z$

$\tan z+\frac{\cos z}{1+sen\,z}$ Resolvemos la suma heterogénea

$$\frac{\tan z(1+sen\,z)+\cos z}{1+sen\,z}$$

$$=\frac{\tan z+\tan z\,sen\,z+\cos z}{1+sen\,z}$$

$$=\frac{\frac{sen\,z}{\cos z}+\frac{sen\,z}{\cos z}sen\,z+\cos z}{1+sen\,z}$$

$$=\frac{\frac{sen\,z+sen^2 z+\cos^2 z}{\cos z}}{1+sen\,z}$$

$$=\frac{\frac{sen\,z+1}{\cos z}}{1+sen\,z}$$

$$=\frac{1}{\cos z}$$

$$=\sec z$$

Demostrar que $sen(90^{o}-\alpha)\sec\alpha=1$

$$sen(90^{o}-\alpha)\sec\alpha$$

$$=\cos\alpha\bullet\sec\alpha$$

$$=\cos\alpha\bullet\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$=1$$

Ejercicios Propuestos

Demostrar las siguientes identidades

1) $(\sec x + \tan x)(1 - sen\,x) = \cos x$

2) $\dfrac{\tan x - \cot x}{\cos x} = \tan x \bullet \sec x - \csc x$

3) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

4) $\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x} = 2\csc^2 x$

5) $(1+\cos v)(1-\cos v) = sen^2 v$

6) $\csc\eta - sen\,\eta = \cot\eta\cos\eta$

7) $\dfrac{\sec^2\rho - 1}{\sec^2\rho} = -sen^2\rho$

8) $\dfrac{1-\tan^2\omega}{1+\tan^2\omega} = 2\cos^2\omega - 1$

9) $\dfrac{1-sen\,\alpha}{1+sen\,\alpha} = (\tan\alpha - \sec\alpha)^2$

10) $\dfrac{\cos x}{1+sen\,x} = \dfrac{1-sen\,x}{\cos x}$

4.5 Ecuaciones Trigonométricas

Consejos para resolver ecuaciones trigonométricas

- ✓ Repasar resolución de ecuaciones vistas en álgebra
- ✓ Utilizar identidades trigonométricas para convertir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica preferiblemente seno o coseno.
- ✓ Factorizar si es posible.
- ✓ Resolver la ecuación
- ✓ Al encontrar la solución inmediata se determina la posibilidad de encontrar más soluciones.

Ejemplos:

I) $sen^2 x - \cos^2 x = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

$sen^2 x - (1 - sen^2 x) = 0$ Se utilizó una identidad

$sen^2 x - 1 + sen^2 x = 0$ Aplicación de álgebra

$2sen^2 x = 1$

$sen^2 x = \frac{1}{2}$

$sen\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = \pm 45^{o}$

Trabajando sen x es positivo y es positivo en el I y II cuadrante

El ángulo de referencia de 45º es 45º

Y colocamos el ángulo de referencia en el segundo cuadrante dando un ángulo de 135º. De manera análoga trabajamos con sen x es negativo.

La solución se da la medida de ángulos en π radianes por lo que hay que convertir las soluciones:

$S=\left\{\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right\}$

II) resolver: $sen(90º-\phi)+\cos\phi=\sqrt{3}$ en el intervalo $[0,2\pi]$

$sen(90º-\phi)+\cos\phi=\sqrt{3}$

$\cos\phi+\cos\phi=\sqrt{3}$ Aplicando identidades

$2\cos\phi=\sqrt{3}$

$\cos\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\phi=30º$

El coseno es positivo. En el plano cartesiano es positivo en I y IV cuadrante por lo que falta la solución del IV cuadrante

El ángulo de referencia de 30º es 30º

Ahora colocamos el ángulo de referencia en el IV cuadrante y el ángulo formado es de 330º

Damos la solución en π radianes: $S=\left\{\frac{1}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi\right\}$

III) Resolver $1+\cot\alpha=1$ en el intervalo $[0,2\pi]$

$1+\cot\alpha=1$

$\cot\alpha=0$

$\alpha=270º$

El ángulo de referencia de 270º es 90º

90º también es solución. Ahora damos la solución en π radianes:

$S=\left\{\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi\right\}$

IV) Resolver la ecuación: $sen^2\theta - 5\cos(90º - \theta) + 6 = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

$sen^2\theta - 5\cos(90º - \theta) + 6 = 0$

$sen^2\theta - 5sen\theta + 6 = 0$ Utilizamos la identidad de cofunción

Y note que es una ecuación cuadrática para visualizarla decimos que sea $x = sen\theta$ y sustituimos en la ecuación:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 3$

$x = 2$

Ya encontrado el valor de x regresamos a la ecuación trigonométrica:

$sen\theta = 3$ Y $sen\theta = 2$

Puesto que el seno tiene un valor máximo de 1, las dos ecuaciones no tienen solución: $S = \varnothing$

V) Resolver la ecuación: $sen\alpha - 2sen\alpha \bullet \cos\alpha = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

$sen\alpha - 2sen\alpha \bullet \cos\alpha = 0$

$sen\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$ Factorizando por factor común

Salen dos ecuaciones: $sen\alpha = 0$ y $1 - 2\cos\alpha = 0$

Si $sen\alpha = 0$

$\alpha = 0º$ El ángulo de referencia es 0º y el seno es positivo en el segundo y primer cuadrante por lo que 180º es solución.

Si $1 - 2\cos\alpha = 0$

$1 = 2\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60º$

El ángulo de referencia de 60º es 60º y el coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante por lo que el ángulo que tiene uno de referencia en el cuarto cuadrante es 300º por lo que la solución es radianes: $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Ejercicios Propuestos:

Resolver las siguientes ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$

1) $4\cos^2 x - 3 = 0$

2) $\dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

3) $2sen\alpha - 1 = 0$

4) $2sen\alpha + 1 = 0$

5) $2\cos\beta + 1 = 0$

6) $(\tan x - 1)(4sen^2 x - 3) = 0$

7) $2sen\lambda - \csc\lambda = 1$

8) $\sqrt{3} + 2sen\theta = 0$

9) $sen^2 a + sen\, a - 6 = 0$

10) $2\cos^2\beta + \cos\beta = 0$

11) $2\cos^2\varepsilon = 3 + 3sen\,\varepsilon$

12) $4\cot\theta = \sqrt{3}\csc^2\theta$

13) $5sen\beta - 2\cos^2\beta = 1$

14) $3\sec^2\alpha = 4\tan^2\alpha$

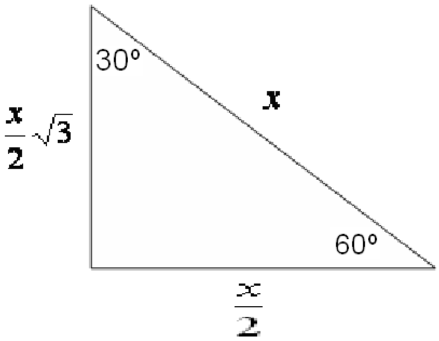
Anexos

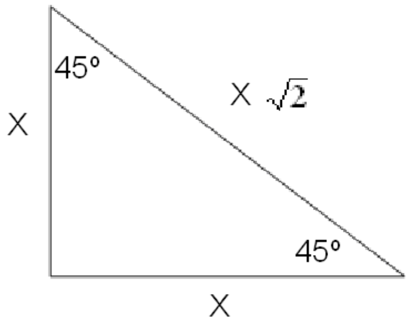
Teorema de Pitágoras

Sea un triángulo rectángulo en el cual c es la medida de la hipotenusa, a y b las medidas de los catetos:

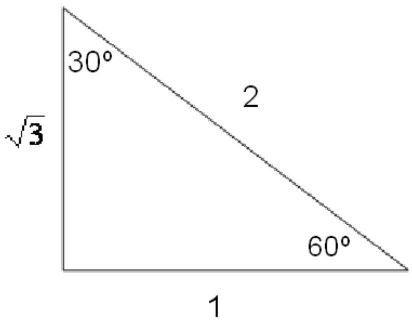
$$c^2 = a^2 + b^2$$

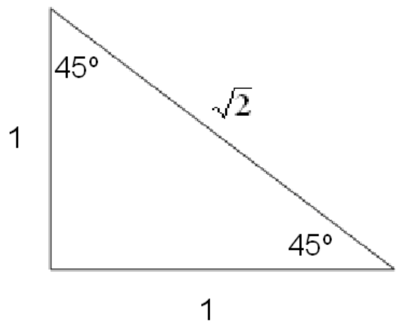
Triángulos Especiales





Triángulos especiales para uso de trigonometría





Ley de Senos y Cosenos

Ley de Senos	Ley de Cosenos
$\dfrac{a}{senA} = \dfrac{b}{senB} = \dfrac{c}{senC}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \bullet \cos A$